Musterlösung 6

1. Wir geben zunächst die Ereignisse A, B, C, D in aufzählender Form an:

$$\begin{aligned}
A &= \{X \in 2\mathbb{Z}\} = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \{2,4,6\}\} = \{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \\
&= \{(2,1),(2,2),...,(2,6),(4,1),(4,2),...,(4,6),(6,1),(6,2),...,(6,6)\} \\
B &= \{1 + Y \in 2\mathbb{Z}\} = \{(\omega_1, \omega_2) : 1 + \omega_2 \in \{2,4,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\} \\
&= \{(1,1),(2,1),...,(6,1),(1,3),(2,3),...,(6,3),(1,5),(2,5),...,(6,5)\} \\
C &= \{X + Y \leq 3\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \\
D &= \{X \leq 2,\ Y \leq 2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}
\end{aligned}$$

a) Wir müssen nachweisen, dass $P[A \cap B] = P[A]P[B]$ gilt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P[A] &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{3 \cdot 6}{6^2} = \frac{1}{2} \\
P[B] &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{|\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{3 \cdot 6}{6^2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

andererseits gilt

$$\begin{aligned}
P[A \cap B] &= \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \\
&= \frac{|\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}|}{6^2} \\
&= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P[A]P[B].
\end{aligned}$$

Damit sind A und B unabhängig.

b) Es gilt:

$$P[C] = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{|\{(1,1),(1,2),(2,1)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12},$$

andererseits haben wir

$$P[A \cap C] = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \frac{|\{(2,1)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = P[A]P[C]$$

Damit sind A und C nicht unabhängig.

Bitte wenden!

c) Analog zu Teil **b)** rechnen wir:

$$P[D] = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{|\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{4}{6^2} = \frac{1}{9},$$

andererseits haben wir

$$P[A \cap D] = \frac{|A \cap D|}{|\Omega|} = \frac{|\{(2,1),(2,2)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P[A]P[D].$$

d) Für die paarweise Unabhängigkeit von A, B und D ist nachzuweisen:

- $P[A \cap B] = P[A]P[B] \rightsquigarrow$ siehe **a)**
- $P[A \cap D] = P[A]P[D] \rightsquigarrow$ siehe **c)**
- $P[B \cap D] = \frac{|\{(1,1),(2,1)\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^2|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \cdot = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P[B]P[D]$

A, B, D sind unabhängig, denn es gilt

$$P[A \cap B \cap D] = \frac{|\{(2,1)\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{36},$$

was auch $P[A]P[B]P[D]$ entspricht.

2. Wir weisen zunächst die paarweise Unabhängigkeit nach:

Beachte, dass $|A| = |B| = |C| = 2$, damit ist $P[A] = P[B] = P[C] = \frac{2}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$

$$P[A \cap B] = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P[A]P[B]$$
$$P[A \cap C] = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P[A]P[C]$$
$$P[B \cap C] = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P[B]P[C]$$

Damit sind A, B, C paarweise unabhängig. Allerdings gilt:

$$P[A \cap B \cap C] = \frac{|\{1\}|}{|\{1,2,3,4\}|} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P[A]P[B]P[C],$$

damit sind A, B, C nicht unabhängig.

3. **a)** Zuerst beobachten wir, dass

$$A, B \text{ sind unabhängig} \Leftrightarrow A, B^c \text{ sind unabhängig},$$

Siehe nächstes Blatt!

denn benutzen wir diese Äquivalenz mit A und B^c, erhalten wir, dass B^c, A unabhängig sind und auch B^c, A^c unabhängig sind. Des weiteren, da $(B^c)^c = B$, reicht es zu zeigen, dass wenn A, B unabhängig sind, dass dann auch A, B^c unabhängig sind. Wir nehmen an, dass

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

und wollen zeigen, dass das

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$$

impliziert.

Es gilt $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, und folglich $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = A \cap (B \cap B^c) = A \cap \emptyset = \emptyset$, woraus wir

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A)P(B) + P(A \cap B^c)$$

schliessen.

Daraus folgern wir

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

b) Nach Annahme haben wir $P(A \cap A_i) = P(A)P(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Da die Ereignisse A_i paarweise disjunkt sind, so sind es auch $A \cap A_i$. Folglich haben wir

$$P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A)P(A_i)$$
$$= P(A)\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A)P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right), \text{was zu beweisen war.}$$

c) Mit a) können wir zeigen, dass die Aussage auch für A gilt, so dass $P(A) = 0$. Für alle Teilmengen $B \in \mathcal{F}$, da $A \cap B \subset A$, bekommen wir mit Hilfe der Monotonie $P(A \cap B) = 0$. Folglich ist $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ erfüllt für jedes $B \in \mathcal{F}$.

4. Wir betrachten ein Laplace Modell . Folglich ist

$$|A \cap B| = \frac{|A||B|}{|\Omega|}$$

äquivalent zu

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

.

Bitte wenden!

a) Zieht man nur eine Karte, dann gilt:

- $|\Omega| = 52$, da das Blatt 52 Karten enthält,
- $|A| = 4$, da das Blatt 4 Könige enthält,
- $|B| = 13$, da das Blatt 13 Pik-Karten enthält, und
- $|A \cap B| = 1$, da es nur einen Pik-König gibt.

Es folgt
$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{4 \times 13}{52} = 1 = |A \cap B|.$$
Also sind A und B unabhängig.

b) Äquivalent, gilt beim Ziehen von zwei Karten:

- $|\Omega| = 52^2 = 2'704$,
- $|A| = 13 \times 4^2 = 208$, da das Paar aus allen der 13 verschieden Karten gebildet werden kann,
- $|B| = 13^2 = 169$, das es 13 Herzkarten gibt, und
- $|A \cap B| = 13 \times 1^2$, da du zweimal die selbe Herz-Karte ziehen musst (von 13 möglichen).

Wir erhalten
$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{208 \times 169}{2'704} = 13 = |A \cap B|.$$
Folglich sind A und B unabhängig.

c) Wir haben:

- $|\Omega| = \binom{52}{2} = 1'326$,
- $|A| = 13 \times \binom{4}{2} = 78$, da das Paar aus allen 13 Karten gebildet werden kann,
- $|B| = \binom{13}{2} = 78$, da es 13 verschiedene Kreuz-Karten gibt, und
- $|A \cap B| = 0$, da ohne Zurücklegen die selbe Karte nicht gezogen werden kann.

Wir beobachten
$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{78 \times 78}{1'326} \approx 4.6 \neq 0 = |A \cap B|.$$
Folglich sind A und B *nicht* unabhängig.

5. a) Wir bemerken, dass wegen der Definition von $\mathbb{1}_A$ gilt:
$$\{\mathbb{1}_A \leq a\} = \{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_A(\omega) \leq a\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } a < 0, \\ A^c, & \text{falls } 0 \leq a < 1, \\ \Omega, & \text{falls } a \geq 1, \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

für alle $a \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable ist.

b) Sei nun $a \in \mathbb{R}$. Die Verteilungsfunktion von $\mathbb{1}_A$ ist

$$F_{\mathbb{1}_A}(a) = P[\{\mathbb{1}_A \le a\}] \overset{\textbf{a)}}{=} \begin{cases} P[\emptyset], & \text{falls } a < 0 \\ P[A^c], & \text{falls } 0 \le a < 1 \\ P[\Omega], & \text{falls } a \ge 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0 \\ 1 - P[A], & \text{falls } 0 \le a < 1 \\ 1, & \text{falls } a \ge 1 \end{cases}$$

wobei wir Proposition 1.8, *i.*, *iii.* und *P1* in Definition 1.6 verwendet haben.

c) <u>1. ⇒ 2.</u>: Die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängig, falls für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P[\mathbb{1}_A \le a, \mathbb{1}_B \le b] = P[\mathbb{1}_A \le a]P[\mathbb{1}_B \le b].$$

Wir bemerken, dass nach **a)** für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{\mathbb{1}_A \le a\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } a < 0, \\ A^c, & \text{falls } 0 \le a < 1, \\ \Omega, & \text{falls } a \ge 1, \end{cases} \qquad \{\mathbb{1}_B \le b\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } b < 0, \\ B^c, & \text{falls } 0 \le b < 1, \\ \Omega, & \text{falls } b \ge 1, \end{cases}$$

Damit sind $\{\mathbb{1}_A \le a\}$ und $\{\mathbb{1}_B \le b\}$ stets unabhängige Ereignisse, da gilt:

- Nach A.3 **a)**: sind A und B unabhängig, so sind auch auch A^c und B^c unabhängig.
- Nach A.3 **c)** ist Ω (mit $P[\Omega] = 1$) sowohl von A^c als auch von B^c unabhängig.
- Jedes Ereignis $C \in \mathcal{F}$ (insbesondere A^c und B^c) ist von $\emptyset$ unabhängig, denn $P[\emptyset \cap C] = P[\emptyset] = 0 = P[\emptyset]P[C]$.

<u>2. ⇒ 1.</u> Falls $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ unabhängig sind, so gilt:

$$P[A^c \cap B^c] = P[\mathbb{1}_A \le 0, \mathbb{1}_B \le 0] = P[\mathbb{1}_A \le 0]P[\mathbb{1}_B \le 0] = P[A^c]P[B^c]$$

und A^c und B^c sind unabhängig. Nach A.3 **a)** sind auch A und B unabhängig.